

EXERCISE TWO

作业4/10课堂交。上机作业交电子版4/13前到邮箱。带***题本科生选做，研究生必做。

- (Dirac comb) 定义 $\Delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$, 则 Dirac comb 是离散的周期序列. 证明其傅立叶展开为 $\Delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inWt}$.
进一步利用 e^{inWt} 的傅立叶变换 $2\pi\delta(x - nw)$, 证明 Dirac comb 的傅立叶变换是 $\widehat{\Delta_T}(t) = W\Delta_W(w)$, 其中 $W = 2\pi/T$.
- 计算 $x(n) = \cos nw, n \geq 0$ 的单边 Laplace 变换 (n 看成实数), z 变换和离散时间傅立叶变换 (DTFT), 说明其收敛域。
*** 计算 $X(z) = \frac{z}{z^2 + \omega^2}$ 的逆 z 变换 $x(n)$.
- 给定一阶系统 $H(z) = \frac{z}{z-K}$, K 是常数。给出其对应的差分方程 (滤波器时域表示). 分别对 $K = 0, 0.5, 1$ 的情形分析其频率响应, 说明滤波器类型 (低通, 高通, FIR, IIR)。
- (梳状滤波器) 设滤波器的传递函数 $H(z) = \frac{1}{N} \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$, N 是一个正整数。
a: 计算其冲激响应 $h(n)$, 分析其频率响应, 说明滤波器类型 (低通, 高通, FIR, IIR)。
b: 给出 $h(n)$ 的 ROC, 系统的零点和极点, 并判断系统的因果性, 稳定性。
*** 对 $H(z) = \frac{1+r}{2} \frac{1-z^{-N}}{1-rz^{-N}}$, $0 < r < 1$, 同样做 a, b.
- (双线性变换) 定义 $s = \frac{z-1}{z+1}$, 证明 s 域中的频率 iw 和 z 域中频率 $e^{iw'}$ 的关系 $w = \tan(w'/2)$.
- 证明: 离散指数信号 e^{iwn} 是所有离散 LTI 系统的特征根。
- *** 给出理想高通滤波器和理想低通滤波器的频率变换公式。利用双线性变换, 说明利用模拟低通滤波器设计数字高通滤波器的步骤。
- *** 证明: (1) 如果离散 LTI 系统是 BIBO 稳定的, 则其传递函数的收敛域 (ROC) 包含单位圆。
*** (2) 如果有理传递函数的离散 LTI 系统是 BIBO 稳定, 则其所有极点都在单位圆内 (ROC 包含 $|z| \geq 1$).

上机作业MATLAB

每次作业要求上交一个README文件说明和若干M文件.要求提交的M文件可直接执行得到相关图表。

本科生上机作业可以1-4人一组；研究生可以互相讨论但要求独立完成。

1. (模拟演示时域的抽样定理)
 - A: 构造一个频率有限的信号(可取若干个正弦信号的和)
 - B: 使用三种抽样频率(Nyquist频率,过抽样和欠抽样频率)进行抽样, 给出对应信号的频谱, 并比较。
***尝试构造混叠现象。
 - D: 尝试从抽样信号恢复原信号(可以用滤波器filter);
 - E: (***)尝试对一个真实图像进行抽样和恢复, 比较恢复前后图像的差异。
2. (z变换) 取 $N = 8, r = 0.9$,验证上面第四题作业的结果。利用residue()求出 $h(n)$,利用zplane()画出零点和极点, 画出频率响应 (freqz,impz,或fv-tool)。
3. (FIR滤波器设计)设计一个低通滤波器其指标是: 通带截止频率 $f_p = 800Hz$,阻带截止频率 $f_s = 1000Hz$, 抽样频率 $f = 4000Hz$,通带波纹 $\alpha_p = 0.5dB$,最小阻带衰减 $\alpha_s = 40dB$.
(注:可计算有 $\delta_p = 0.0559, \delta_s = 0.01, w_p = 0.4\pi, w_s = 0.5\pi$.)
(注: 滤波器的阶可以自定。)
 - A: 利用MATLAB函数设计等波纹滤波器: firpmord(), firpm(); 画出频率响应图(.fig 或.jpg)
 - B: 利用MATLAB函数设计最小二乘滤波器: firls();画出频率响应图(.fig 或.jpg)
 - C: 利用MATLAB函数设计基于窗函数的FIR滤波器。可用某一个窗函数blackman(),hamming(),kaiser()等; 滤波器: fir1(); 选取不同的阶说明其对结果的影响。
 - D: 比较三种方法的差异。